

CEVAPLI KİTAPÇIK

Soru	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Toplam
Puan	11	13	13	11	10	12	10	10	10	100

9 açık uçlu / kısa cevaplı soru · 100 puan. Yanıtlarında istenen işlem, gerekçe ve kanıtı göster.

Yazılı provasıdır. Okulunun seçtiği senaryoyu kontrol et.

1. Ondalık logaritma · 11 puan

Bir ölçümün bilimsel gösterimi $x=10^{-3}$ olarak verilmiştir. Bu soruda $\log_{10}$ tabanındaki logaritmadır.

log x değerini bulunuz. log 100000 ile log 0,01'i de hesaplayıp sonucun pozitif, sıfır veya negatif olmasını x'in 1 ile ilişkisi üzerinden açıklayınız.

Örnek yanıt

$\log x = -3$, $\log 100000 = 5$, $\log 0,01 = -2$. 10 tabanı 1'den büyüktür; $x > 1$ ise $\log x > 0$, $x = 1$ ise $0,0 < x < 1$ ise negatif olur.

- Sayıları 10'un kuvveti olarak yaz.
- Logaritmanın üssü verdiğini kullan.

Dikkat: Negatif logaritma değeri ile negatif logaritma içini karıştırmak.

2. Doğal logaritmalı büyüme · 13 puan

Bir deneyde miktar $Q(t) = 50 e^{(0,2 t)}$ ile modelleniyor; $t \geq 0$ saat. Modeldeki miktarın 150 olduğu an aranıyor. $\ln 3 \approx 1,0986$ veriliyor.

Zamanı doğal logaritma kullanarak bulunuz. Neden $\ln(e^u) = u$ özelliğini kullandığınızı açıklayınız ve sonucu yaklaşık iki ondalıkla yazınız.

Örnek yanıt

$e^{(0,2 t)} = 3$. Doğal logaritma e tabanında olduğundan $0,2 t = \ln 3$; $t = \ln 3 / 0,2 \approx 5,493 \approx 5,49$ saat.

- Önce miktarı başlangıç 50'ye böl.
- İki tarafa $\ln$ uygulayarak üssü yalnız bırak.

Dikkat: 0,2 ile bölmek yerine çarpmak.

3. Çarpım mı toplam mı? · 13 puan

$a > 0, a \neq 1$ koşullarında $\log_a(25 \cdot 4)$ ifadesi inceleniyor.

Çarpım kuralını kullanarak ifadeyi açınız. $a=10$ için sayısal sonucunu bulunuz. “ $\log_a(u+v)=\log_a u+\log_a v$ ” iddiasını $u=v=1$ örneğiyle denetleyiniz.

Örnek yanıt

$\log_a(25 \cdot 4)=\log_a 25+\log_a 4$. $a=10$ için $\log 100=2$. $u=v=1$ için sol $\log_a 2$, sağ $0+0=0$ olur; $\log_a 2 \neq 0$ çünkü $2 \neq 1$. Toplama kuralı iddiası yanlıştır.

- Geçerli kuralın çarpım içi için olduğunu kullan.
- Toplam iddiasını basit bir karşı örnekle sınyarak ayır.

Dikkat: Logaritmayı her toplama işlemi üzerine dağıtmak.

4. Tek logaritmada birleştirme · 11 puan

Bu soruda bütün logaritmalar 2 tabanındadır. $E=\log_2 48-\log_2 3+2 \log_2 2$ verilmiştir.

E’yi önce tek bir logaritma, sonra tam sayı olarak yazınız. Kullandığınız bölüm ve kuvvet kurallarını belirtiniz.

Örnek yanıt

$E=\log_2(48/3)+\log_2(2^2)=\log_2(16 \times 4)=\log_2 64=6$. Çıkarma bölüm, katsayı logaritma içindeki üs olarak kullanılır.

- $2 \log_2 2=\log_2 4$ dönüşümünü yap.
- Çarpım ve bölümle tek logaritmada birleştir.

Dikkat: $2 \log_2 2$ ’yi $\log_2(2 \times 2)$ olarak düşünmek bu sayıda tesadüfen doğru sonuç verse de genel kuralı yanlış açıklamak.

5. Taban değiştirme · 10 puan

$\log_2 3=p$ verilmiştir.

$\log_4 27$ ’yi p cinsinden bulunuz. Taban değiştirme ve kuvvet kurallarını her adımda gösteriniz.

Örnek yanıt

$\log_4 27=\log_2 27/\log_2 4=3 \log_2 3/2=3 p/2$.

- Pay ve paydayı aynı 2 tabanıyla yaz.
- $27=3^3$ ve $4=2^2$ dönüşümlerini kullan.

Dikkat: Taban değiştirme kesrinin pay ve paydasını ters yazmak.

6. Denklemden tanım kontrolü · 12 puan

Gerçek sayılarda $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ denklemi veriliyor.

Önce tanım koşulunu yazınız. Denklemi çözünüz ve cebirsel olarak bulunan adayların hangilerinin geçerli olduğunu denetleyiniz.

Örnek yanıt

Tanım $x-1 > 0$ ve $x+1 > 0$, yani $x > 1$. $\log_2(x^2-1) = 3 \Rightarrow x^2-1 = 8 \Rightarrow x = \pm 3$. Koşulu yalnız 3 sağlar; çözüm kümesi $\{3\}$.

- Logaritma içlerini ayrı ayrı pozitif kıl.
- Çarpım kuralından sonra çıkan iki kökü başlangıç koşuluyla karşılaştır.

Dikkat: Çarpım pozitif diye iki logaritma içinin negatif olmasına izin vermek.

7. Yarılanan madde modeli · 10 puan

Bir maddenin miktarı her 6 saatte yarıya inmektedir. Başlangıç miktarı 80 gramdır; modelde başka ekleme veya kayıp mekanizması yoktur.

$t \geq 0$ için miktarı $M(t)$ ile modelleyiniz. Miktarın 10 gram olduğu zamanı bulunuz ve modelin uzun zamanda 0'a yaklaşmasıyla herhangi bir sonlu zamanda 0 olması arasındaki farkı açıklayınız.

Örnek yanıt

$M(t) = 80(1/2)^{t/6}$. $10/80 = 1/8 = (1/2)^3$ olduğundan $t/6 = 3$, $t = 18$ saat. Modelde miktar her sonlu t 'de pozitifdir; t büyüdükçe 0'a yaklaşır ama 0'a eşit olmaz.

- Her 6 saati bir yarılanma olarak say.
- Üstel modelin pozitifliğini uzun zaman davranışından ayır.

Dikkat: Üssü $t/6$ yerine 6 talarak yarılanma süresini ters yorumlamak.

8. Dizi bir fonksiyondur · 10 puan

$a_n = 3^{n-1}$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ile bir sayı dizisi tanımlanıyor. Bir öğrenci $a_{1/2}$ değerini hesaplayıp dizinin ikinci terimi olduğunu söylüyor.

İlk üç terimi bulunuz. Dizin tanım kümesini fonksiyon kavramıyla açıklayıp öğrencinin yorumunu değerlendiriniz.

Örnek yanıt

İlk terimler 2, 5, 8. Dizi, pozitif tam sayı indislerinden gerçek sayılara bir fonksiyondur. $1/2$ tanım kümesinde değildir; $a_{1/2}$ bu dizide terim değildir. İkinci terim $a_2 = 5$ 'tir.

- İndis olarak 1, 2, 3 yerleştir.
- Formülün cebirsel olarak başka sayılarda hesaplanabilmesiyle tanım kümesini ayır.

Dikkat: Genel terim formülüne her gerçek sayının indis olarak konabileceğini varsaymak.

9. İndirgeme bağıntısını izleme · 10 puan

$a_1=2$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1}=2a_n+1$ tanımlanıyor.

a_2, a_3 ve a_4 'ü bulunuz. $a_n=3 \cdot 2^{(n-1)}-1$ ifadesinin ilk terimi ve verilen indirgeme bağıntısını sağladığını gösteriniz.

Örnek yanıt

$a_2=5, a_3=11, a_4=23$. $n=1$ için $3 \cdot 1 - 1 = 2$. $2[3 \cdot 2^{(n-1)} - 1] + 1 = 3 \cdot 2^n - 1$; bu a_{n+1} formülüdür.

- Önceki terimi bağıntıya sırayla yerleştir.
- Önerilen genel ifadeyi başlangıç ve geçiş koşullarında kontrol et.

Dikkat: Her terimde $a_1=2$ kullanıp $a_2=a_3=a_4=5$ sanmak.